

## Форма «Т». Титульный лист отчета о выполнении проекта

Название проекта: <b>Исследование кварк-глюонной плазмы методами решеточной КХД</b>	Номер проекта: <b>15-12-20008</b>	
Код типа проекта: <b>ВУ</b> Отрасль знания: <b>02</b>		
Фамилия, имя, отчество (при наличии) руководителя проекта: <b>Накамура Атсуши</b>	Контактные телефон и e-mail руководителя проекта: <b>+817056703512, nakamura@riise.hiroshima-u.ac.jp</b>	
Полное и краткое название организации, через которую осуществляется финансирование проекта: <b>федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Дальневосточный федеральный университет" ДВФУ</b>		
Объем средств, фактически полученных от РНФ в 2016 г.: <b>10000 тыс. руб.</b>	Год начала проекта: <b>2015</b>	Год окончания проекта: <b>2017</b>
Объем финансирования, запрашиваемый на 2017 год: <b>10000 тыс. руб.</b> (для продолжающихся проектов)		
Перечень приложений к отчету	1. Копии публикаций в соответствии с Formой 2о - 6 шт. на 12 стр. в 1 экз. <i>К печатному экземпляру отчета прикладываются только копии первой (с указанием авторов) страницы и страницы со ссылкой на поддержку отРНФ.</i>	
<b>Гарантирую, что при подготовке отчета не были нарушены авторские и иные права третьих лиц и/или имеется согласие правообладателей на представление в РНФ материалов и их использование РНФ для проведения экспертизы и для их обнародования.</b>		
Подпись руководителя проекта  <div style="text-align: right;">/А.Накамура/</div>		Дата подачи отчета: <b>09 декабря 2016 г.</b>
Подпись руководителя организации Либо уполномоченного представителя, действующего на основании доверенности. В случае подписания форм уполномоченным представителем организации (в т.ч. – руководителем филиала) к печатному экземпляру отчета прилагается доверенность (копия доверенности, заверенная печатью организации).  _____ / _____ /		
Печать организации		

Отчет о выполнении проекта  
№ 15-12-20008  
«Исследование кварк-глюонной плазмы методами решеточной  
КХД»,  
в 2016 году

### 1.1. Заявленный в проекте план работы на год

Формируется в соответствии с заявкой.

1) Будут выполнены работы по оптимизации созданного на первом этапе программного комплекса для генерации конфигураций калибровочного поля с ненулевым (мнимым) химическим потенциалом. В блоке генерации конфигураций будет добавлен preconditioning типа Хазенбуша, необходимый для генерации конфигураций с небольшими массами кварков. В блоке вычисления наблюдаемых будет разработан код для вычисления восприимчивости кирального конденсата.

2) Генерация конфигураций при мнимом химическом потенциале

Метод канонического ансамбля для решения проблемы вычислений в решеточной КХД при ненулевом барионном химическом потенциале включает в себя как необходимую часть генерацию конфигураций калибровочного поля с мнимым химическим потенциалом. В 2016 году, используя созданный на 1-м этапе программный комплекс, мы выполним такую генерацию на решетках размером от  $8^3 \times 4$  (тестовых) до  $18^3 \times 6$  (реальные расчеты) в диапазоне параметров решеточного действия, соответствующих температурам от  $0.95 T_c$  до  $2T_c$  и пионной массе  $O(1 \text{ ГэВ})$ .

3) Упрощенный метод вычисления канонического распределения  $Z_n$

Используя сгенерированные конфигурации с мнимым химическим потенциалом мы вычислим среднее  $\langle n \rangle$  - плотность числа частиц и ее восприимчивость. Аппроксимируя производящую функцию большого канонического ансамбля  $Z(\mu, T)$  несколькими членами ряда  $Z_n(T) \cdot \exp(\mu/T)$  для мнимого  $\mu$ , мы фитируем данные для  $\langle n \rangle$  и ее восприимчивости, и вычислим  $Z_n(T)$  для малых значений  $n$ , рассматривая их как параметры фита. Далее мы используем полученные результаты для вычислений физических наблюдаемых при действительных значениях  $\mu$ : барионная плотность и ее восприимчивость, давление, киральный конденсат, производная  $Z_n(T)$  по температуре, статический потенциал, адронные массы экранирования и др.

Такой метод приближенного вычисления физических величин для ненулевого химического потенциала будет использован впервые. Мы ожидаем, что нам понадобится примерно 10 значений мнимого потенциала (в диапазоне  $0 < \mu/T < 2\pi/3$ ) при фиксированной температуре и массе кварка для получения результатов этим методом. Точность полученных результатов будет зависеть от числа значений мнимого химического потенциала, для которых мы сможем сгенерировать конфигурации калибровочного поля с достаточной статистикой. Мы сравним полученные результаты с результатами, полученными другими группами. Позднее, мы сравним их также с нашими результатами, полученными методом канонического ансамбля, обсуждаемого в следующем пункте плана.

4) Метод канонического ансамбля

Для вычисления канонического распределения  $Z_n$  методом канонического ансамбля необходимо

иметь конфигурации калибровочного поля с достаточной статистикой для большого числа значений мнимого потенциала, порядка 100, для заданных  $T$  и  $m_q$ .

Тогда мы сможем вычислить  $Z_n$ , используя численное Фурье преобразование по мнимому химическому потенциалу. В этом случае  $Z_n$  будет вычислено для  $n$  от 0 до больших значений (порядка 20), поэтому точность вычислений физических величин будет намного выше, чем в методе, описанном в предыдущем пункте. При этом необходимое компьютерное время будет намного выше, поэтому вычисления будут выполнены только для небольшого числа значений  $T$  и  $m_q$ .

#### 5) Метод канонического ансамбля для случая 2-х химических потенциалов

Мы можем рассматривать два химических потенциала независимо: барионный и зарядовый, т. е. независимые химические потенциалы для  $u$  и  $d$  кварков. Такая формулировка позволяет вычислять распределения заряда  $P(Q)$  при фиксированном значении барионного заряда  $B$  и наоборот. Такие распределения можно сравнить с экспериментальными результатами, полученными в экспериментах по столкновению тяжелых ионов. На первом этапе такие распределения были вычислены с использованием разложения для фермионного детерминанта по параметру карпа (hopping parameter expansion). Мы планируем выполнить вычисления без этого приближения. Для этой цели будет необходимо генерирование конфигураций калибровочного для мнимого химического потенциала с увеличением числа точек, что означает значительное увеличение необходимого компьютерного времени. В зависимости от скорости счета будет выбран метод приближений аналогичный рассмотренному в пункте 3) или точный метод, описанный в пункте 4) для случая одного химического потенциала.

#### 6) Исследование вязкости.

Мы продолжим разработку методов вычисления корреляторов тензора энергии-импульса (ТЭИ), необходимых для вычисления вязкости. Вязкость определяется по спектральной плотности коррелятора ТЭИ, которая вычисляется из интегрального уравнения. Поэтому коррелятор ТЭИ должен быть вычислен с очень большой точностью на решетке довольно большой решетке (число узлов по 4-му направлению должно быть более 10, а число узлов по пространственным направлениям в 2-3 раза больше). В настоящий момент используемые методы позволяют набрать необходимую статистику в случае глюодинамики. Но в случае КХД с динамическими кварками возможности для набора статистики намного меньше, поэтому нужны новые методы, которые более эффективно подавляют ультрафиолетовые флуктуации. На 1-м этапе мы попробовали несколько методов: улучшенное действие, метод градиентного потока, явное выделение инфракрасных степеней свободы. В 2016 году эта деятельность будет продолжена. Мы выполним вычисление коррелятора ТЭИ для глюодинамики методом градиентного потока с большой статистикой и на решетках размером до  $48^3 \times 16$ . Полученные результаты позволят профитировать коррелятор с использованием модельной спектральной функции и вычислить сдвиговую вязкость. Заметим, что данный метод применим также и в случае решеточной КХД с динамическими кварками.

Мы продолжим исследование вклада цвето-магнитных степеней свободы в вязкость глюонной плазмы. Для этого будет выполнено вычисление коррелятора ТЭИ на конфигурациях без вихрей, полученных после фиксации центральной калибровки и дополнительного преобразования, убирающего так называемые  $P$ -вихри, с помощью метода градиентного потока. Таким образом мы получим перенормированный коррелятор и сможем его сравнить с перенормированным коррелятором, вычисленным для исходных полей. Это сравнение позволит сделать вывод о вкладе вихрей в вязкость. Например, если вязкость не изменится, будет понятно, что вихри не влияют на ее значение. Аналогичное исследование будет выполнено для

монополей.

Мы также рассмотрим обратный случай - вычислим коррелятор ТЭИ на конфигурациях, в которых ликвидированы ультрафиолетовые степени свободы, а цвето-магнитные остались. Хотя в этом случае пока неясно как выполнять перенормировку, мы можем сравнить отношения  $C(t)/s^2$ , которые не зависят от нормировки, и сделать вывод о вкладе вихрей и монополей (в случае монополей — уточнить уже сделанный вывод) в вязкость.

## 1.2. Заявленные научные результаты на конец года

Формируется в соответствии с заявкой.

1) Повышение эффективности работы ПК за счет использования более эффективного preconditioning и оптимизации других частей ПК.

2) Результаты для физических наблюдаемых (барионная плотность и ее восприимчивость, давление, киральный конденсат, производная  $Z_n(T)$  по температуре, статический потенциал, адронные массы экранирования) при ненулевом химическом потенциале, полученные упрощенным методом вычисления канонического распределения  $Z_n$  в широком диапазоне значений химического потенциала и температуры для нескольких значений массы кварка. Публикация результатов в журнале.

3) Результаты для физических наблюдаемых (барионная плотность и ее восприимчивость, давление, киральный конденсат, производная  $Z_n(T)$  по температуре, статический потенциал, адронные массы экранирования) при ненулевом химическом потенциале, полученные методом канонического ансамбля для двух значений температуры и одного значения массы кварка в широком диапазоне значений химического потенциала. 1-2 публикации в журнале.

4) Метод канонического ансамбля для случая 2-х химических потенциалов и первые результаты для физических наблюдаемых, полученных этим методом. Публикация в журнале.

5) Эффективный метод вычисления вязкости, основанный на методе градиентного потока и ее численное значение в глюодинамике. Качественный вывод о вкладе монополей и вихрей в вязкость. 1-2 публикации в журнале.

## 1.3. Сведения о фактическом выполнении плана работы на год

*(фактически сделанная работа, до 10 стр.)*

1) Работы по оптимизации созданного на первом этапе программного комплекса для генерации конфигураций калибровочного поля с ненулевым (мнимым) химическим потенциалом.

В результате выполнения работ по гранту программный комплекс был улучшен в четырех направлениях:

1) улучшена архитектура программного кода, что позволило использовать разделяемую (shared) память на видеокarte для размещения в ней локальных переменных, добавлена поддержка использования текстурного кэша а также переработана вся подсистема операторов Дирака, выполняющее действие оператора Дирака на псевдоспинорный вектор;

2) добавлена поддержка вычислений с плавающей запятой, целыми и рациональными числами с произвольной точностью (multiple-precision floating-point) на основе библиотеки GMP и MPFR;

3) добавлен preconditioning типа Хазенбуша;

4) добавлена поддержка дополнительных наблюдаемых: киральный конденсат и восприимчивость кирального конденсата.

При использовании GPU разработчику доступно шесть типов памяти: регистры, локальная, разделяемая, глобальная, константная и текстурная память. Каждая из этих типов памяти имеет определенное назначение, которое обуславливается её техническими параметрами (скорость работы, уровень доступа на чтение и запись). Основная характеристика памяти является её латентность, т.е. задержка при предоставлении управления по чтению или записи к определенной её ячейки. Наиболее быстродействующей памятью для GPU являются регистры, они расположены на кристалле GPU процессора. Объем регистровой памяти строго ограничен и равен 128 или 256 KB на один SM (Streaming Multiprocessors). Этого достаточно, чтобы на одной нити разработчику было доступно 63 (для GF100) или 255 (для GK110) 32 битных регистра. Все остальные локальные переменные вытесняются в более медленную глобальную память, что приводит к огромному падению быстродействия. Например для перемножения двух матриц  $SU(3) a=bc$  требуется хранить 3 матрицы, и для двойной точности потребуется 108 ( $3 \cdot 18^2$ ) 32 битных регистра. Для экономии регистровой памяти добавлена поддержка использования разделяемой памяти, что позволяет получить прирост в производительности более чем в два раза на видеокартах с 63-я 32 битными регистрами на поток.

Действие КХД в решеточном подходе формулируется в приближении ближайших соседей, что приводит к тому, что при расчете на видеокарте соседние узлы используют одни и те же данные (калибровочные поля) в разные моменты времени, таким образом из глобальной памяти один и тот же объект считывается большое число раз (от 2 до 12 раз). Для уменьшения количества запросов в глобальную память калибровочная конфигурация кэшируется в текстурном кэше. Нам удалось получить увеличение быстродействия на 30--50% с использованием текстурного кэша.

Узким местом в решеточном КХД является действие оператора Дирака на псевдоспинорный вектор. Мы уделили данному вопросу особенное внимание, и явно расписали действие оператора Дирака и упростили все выражения (24 таких выражений) минимизируя количество операций. Это улучшение дало нам еще +10% производительности.

При работе над проектом мы пользовались двумя методами расчета зависимости фермионного детерминанта от мнимого химического потенциала: метод интегрирования барионной плотности и "Winding number expansion" (WNE), основывающийся на разложении хоппинг параметру (Hopping parameter expansion -- HPE). Для второго метода нам требуется численно рассчитывать коэффициенты  $W_n$  ряда WNE. При расчете мы столкнулись с нехваткой двойной точности (double), т.к. требовалось хранить числа  $< 10^7$  (700). Минимальное число double  $\sim 10^4$  (308). Для решения данной проблемы мы ввели у каждого псевдоспинорного вектора префактор, который хранится в переменной с плавающей запятой с произвольной точностью. Для этого мы используем библиотеку GMP (GNU Multi-Precision Library, <https://gmplib.org/>) совместно с библиотекой MPFR (The GNU MPFR Library, <http://www.mpfr.org/>). Мы используем 2048 бит для хранения вещественного числа, что больше в 39 раз, чем у double.

Для ускорения процесса генерации конфигураций с небольшими массами кварков была добавлен preconditioning типа Хазенбуша (M. Hasenbusch, K. Jansen, Nucl. Phys. B, 659 (2003) 299, hep-lat/0211042). Базовая идея данного алгоритма заключается в разбиении фермионной матрицы на две, которые имеют числа обусловленности (condition number) меньше по сравнению с исходной матрицей. Обратить две такие матрицы оказывается быстрее, чем одну исходную. Фермионное действие в данном случае можно записать в виде (1) (здесь и далее нумерация формул и рисунков в соответствии с прилагаемым файлом с дополнительными материалами).  $\phi_1$  и  $\phi_2$  -- два различных псевдофермионных вектора. В случае равенства  $\kappa$  и  $\kappa'$  с

тильдой и равенства коэффициента Шехольслами-Вохлерта  $C_{SW}$  (Sheikholeslami-Wohlert) и  $C_{SW}$  с тильдой действие запишется в виде (5), а фермионная сила в виде (6). Вильсоновская и улучшенная части фермионной силы указаны в формулах (7-8). Авторы данного алгоритма, утверждают, что наилучшее значение параметра  $\omega$  (10) связано с наибольшим и наименьшим собственным значением оператора  $D^{\dagger}D$ . На практике мы находили значение  $\omega$  численно, минимизируя время интегрирования в молекулярной динамике. Для отношения  $m_{PS}/m_V=0.65$ , которое задает массу кварка, и  $\beta=2.0$  мы получили прирост производительности в полтора раза. При этом мы ожидаем, что при  $m_{PS}/m_V < 0.65$  мы получим прирост производительности более чем в полтора раза. Относительно небольшое ускорение связано с тем, что для тестов мы брали не достаточно малую массу кварков. Однако, при использовании этого метода совместно с техникой "multiple time scales" в алгоритме молекулярной динамики мы получили увеличение быстродействия в 2 раза.

Для исследования киральных свойств теории мы добавили две дополнительные наблюдаемые: киральный конденсат (11) и киральную восприимчивость (12).

## 2) Генерация конфигураций при мнимом химическом потенциале.

В таблице 1 представлены все данные, которые мы имеем на текущий момент (декабрь 2016 года). Основная генерация данных началась в начале 2016 года. В начале расчетов мы сделали тестовые симуляции для  $T/T_c = 1.35$  на решетках  $8^3 \times 4$ ,  $16^3 \times 4$  и  $20^3 \times 4$ . Все расчеты были выполнены на кластере Восток-1 (ДВФУ), который имеет 20 видеокарт GPU Nvidia K40. Было принято решение выбрать решетку  $16^3 \times 4$  как основную, т.к. работая на решетке такого размера мы смогли за 8 месяцев набрать достаточную статистику для 6 значений температуры (3 температуры в конфайнменте, 3 -- в деконфайнменте) на имеющихся вычислительных ресурсах. Текущая версия компьютерного кода для алгоритма гибридного Монте Карло позволяет нам уменьшить массу кварков, не увеличивая потребность в вычислительных ресурсах для расчетов в 2017 году.

## 3) Упрощенный метод вычисления канонического распределения $Z_n$

Простейший метод вычисления канонического распределения  $Z_n$  заключается в следующем. Используя сгенерированные конфигурации с мнимым химическим потенциалом мы вычисляем среднее плотности частиц  $\langle n \rangle$ . Известно, что плотность частиц по определению выражается через функцию большого канонического ансамбля  $Z(\mu, T)$  с нормализующим фактором  $C = 1/3N_s^3$ . Ограничивая число членов  $Z_n(T) \cdot \exp(\mu/T)$  в этой формуле числом  $N_{\max}$ , мы можем профитировать данные для плотности при мнимом химическом потенциале, где функции канонического распределения  $Z_n$  выбраны в качестве параметров фитирования. При этом мы должны проверить, что при увеличении  $N_{\max}$  качество фита не изменяется.

Заметим, что при другом выборе константы  $C$  качество и стабильность фита изменится. Так если выбрать  $C = 1/3$ , можно получить неплохие фиты. При  $N_{\max} = 4$  мы получили фит с  $\chi^2/\text{dof} = 0.91$ . Однако, даже в данном случае значения функций канонического распределения получаются не физические - они могут быть отрицательные и не соответствуют асимптотическому убыванию. При увеличении  $N_{\max}$  качество фита сначала незначительно улучшается, а потом сильно ухудшается из-за того, что появляются сильные флуктуации. При этом сами функции канонического распределения  $Z_n$  сильно изменяются.

Выбор другой константы  $C$  соответствует тому, что мы фитируем плотность частиц функцией с параметрами, которые не являются функциями канонического распределения. Чтобы получить искомые  $Z_n$  мы должны восстановить правильную константу, но тогда получится, что в числителе и знаменателе стоят различные  $Z_n$ , что противоречит определению. Таким образом,

чтобы получить функции канонического распределения мы должны с самого начала правильно выбрать константу  $C$ . Нам не удалось получить разумных фитов с правильной константой  $C$ . Мы думаем, это связано с тем, что, строго говоря, формула для плотности частиц работает при  $N_{\max} = \infty$ , поэтому, по крайней мере,  $N_{\max}$  должно быть большим (десятки), а в этом случае сама задача фита оказывается крайне сложной, кроме того, что ошибка фита  $Z_n$  при малых  $n$  может значительно превышать сами значения  $Z_n$  при высоких  $n$ .

#### 4) Метод канонического ансамбля

Мы предложили новый подход к задаче вычисления производящего функционала для канонического ансамбля в решеточной КХД при ненулевом барионном химическом потенциале в рамках метода канонического ансамбля (публикация [2] в списке публикаций по результатам проекта). Процедура состоит из нескольких шагов. Сначала вычисляется барионная плотность  $n_q$  для мнимых значений химического потенциала. Затем, также для мнимых значений химического потенциала, вычисляется производящий функционал для большого канонического ансамбля  $Z_{GC}$ . Для этого мы использовали процедуру подгонки барионной плотности для упрощения процедуры численного интегрирования. Наконец, мы вычислили производящий функционал для канонического ансамбля  $Z_n$ , используя численное преобразование Фурье с высокой точностью вычислений.

Для проверки описанного выше метода вычисления  $Z_n$  мы выполнили моделирование решеточной КХД с  $N_f=2$ , используя улучшенное Вильсоновское действие для кварков и улучшенное калибровочное действие Ивасаки. Мы использовали решетку размером  $16^3 \times 4$  для 6 значений температуры:  $T/T_c=1.35, 1.20, 1.08$  в фазе деконфайнмента и  $T/T_c=0.99, 0.93, 0.84$  в фазе конфайнмента ( $T_c$  - температура перехода в кварк-глюонную плазму при нулевом химическом потенциале) для массы кварков, определяемой соотношением  $m_\pi/m_\rho=0.8$ . Все параметры решеточного действия, включая значение  $c_{sw}$  были взяты из работы коллаборации WHOT-QCD. Для расчета плотности частиц мы использовали от 1000 до 2000 конфигураций калибровочного поля для каждого значения мнимого  $\mu$ . Использовалась только каждая 10-я траектория алгоритма молекулярной динамики, сгенерированная в процессе выполнения гибридного алгоритма Монте Карло с длиной траектории равной 1. Число значений мнимого химического потенциала для каждого значения температуры варьировалось от 20 до 40. Таким образом, суммарно мы сгенерировали более 200 000 конфигураций калибровочного поля.

Известно, что в приближении невзаимодействующего кварк-глюонного газа кварковая плотность описывается полиномом по химическому потенциалу. Это позволяет предположить, что в фазе деконфайнмента при достаточно высокой температуре кварковая плотность также описывается полиномом по химическому потенциалу.

Для  $T/T_c=1.35$  мы получили очень хороший фит данных для  $n_q$  с двумя параметрами при  $\chi^2/N_{dof} = 0.67$ , с  $N_{dof}=24$ .

Затем были вычислены  $Z_n$ . Интегрирование было выполнено численно с использованием библиотеки GMP (GNU Multi-Precision Library, <https://gmplib.org/>), MPFR (The GNU MPFR Library, <http://www.mpfr.org/>) и MPFR C++ (C++ интерфейс к MPFR, <http://www.holoborodko.com/pavel/mpfr/>), позволяющие проводить вычисления с большим числом значащих цифр (мы использовали до 1000). Нам удалось получить значения  $Z_n$  до  $n=300$ . Результаты представлены на Рис.~2.

Для проверки точности наших вычислений мы использовали полученные значения  $Z_n$  для вычисления  $n_q$ . Мы получили очень хорошее согласие с исходными данными для  $n_q$ . Для всех  $\mu_q$  относительное отклонение для мнимой кварковой плотности не превышает 0.6%.

Но решающей проверкой предложенного нами нового метода вычисления  $Z_n$  является сравнение результатов, полученных этим методом, с результатами, полученными известным методом - методом разложения по хоппинг параметру. Для вычислений методом разложения по хоппинг параметру мы использовали только 40 конфигураций при  $\mu_q=0$ . Поэтому

статистическая погрешность для результатов, полученных этим методом, сравнительно большая. Мы обнаружили, что два независимых метода дают отличное согласие, хотя значения  $Z_n$  меняются на 20 порядков. Для всех значений  $n$  относительное отклонение результатов, полученных двумя методами, равно нулю в пределах статистической погрешности.

Хотя оба метода являются приближенными, они имеют систематические погрешности разной природы и совпадение результатов не может быть случайным. Таким образом, мы можем сделать вывод, что предложенный метод работает, во всяком случае в фазе деконфайнмента. Отметим, что для нового метода нет ограничений на массу кварка, в отличие от метода разложения по хоппинг параметру. Более того, наши вычисления новым методом потребовали значительно меньше компьютерного времени (для одинаковой статистики).

Наши результаты позволяют вычислить коэффициенты ряда Тейлора для кварковой плотности ( $a$  значит и для давления). Мы обнаружили замечательное согласие с результатами, полученными прямым вычислением этих коэффициентов, при этом погрешность наших результатов меньше.

Мы получили аналогичные результаты для  $T/T_c=1.20$ . Для  $T/T_c=1.08$  ситуация сложнее. Эта температуры лежит ниже значения температуры Роберге-Вайса и при изменении мнимого химического потенциала система переходит из фазы деконфайнмента в фазу конфайнмента. С помощью восприимчивости поляковской петли мы определили значение для точки перехода. Известно, что при исследуемом значении массы кварка этот переход является кроссовером. Мы пока не решили проблему выбора правильной подгоночной функции для кварковой плотности для этого интервала температур (между  $T_c$  и  $T_{RW}$ ). Это — задача следующего этапа исследований. Пока мы использовали полиномиальный фит для ограниченного интервала значений мнимого химического потенциала  $mu_{qI}$ . Это позволяет получить кварковую плотность для значений  $mu_{qI}$  по крайней мере в том же интервале значений, в котором справедливо использование разложения в ряд Тейлора.

Для фазы конфайнмента вычисления также были выполнены для 3-х значений температуры. Известно, что в фазе конфайнмента модель адронных резонансов хорошо описывает термодинамические величины. Поэтому разумно использовать для подгонки плотности функцию, вытекающую из этой модели. Для мнимого химического потенциала — это ряд Фурье, с конечным числом членов. Мы обнаружили, что для  $T/T_c=0.93$  и  $0.84$  одного члена достаточно, для  $T/T_c=0.99$  необходимо два члена. При увеличении точности вычислений будет возможно вычисление коэффициентов Фурье для следующих членов.

Снова мы проверили, что вычисленные  $Z_n$  воспроизводят данные для  $n_{qI}$ . Максимальное отклонение было не более чем 0.3%. Далее мы сравнили результаты с методом разложения по хоппинг параметру. Мы использовали полную статистику (1800 конфигураций при  $mu_{qI}=0$ ) для вычислений этим методом. Результаты двух методов согласуются вплоть до  $n=21$ . Полученное согласие подтверждает правильность нашего метода для фазы конфайнмента. Мы считаем, что разногласие для более высоких значений  $n$  объясняется недостаточной точностью вычислений  $Z_n$  в методе разложения по хоппинг параметру. Проблема улучшения точности метода разложения по хоппинг параметру будет исследована на следующем этапе проекта.

Правильность нашего метода вычисления  $Z_n$  означает, что аналитическое продолжение в область действительных значений химического потенциала достоверно вплоть до больших значений  $mu_{qI}$ , во всяком случае находящихся за пределами области применения метода разложения в ряд Тейлора. Точное определение границ применимости аналитического продолжения будут сделаны в будущем после получения более точных данных в методе разложения по хоппинг параметру, с которым мы сравниваем результаты нашего метода.

В случае использования одного члена ряда Фурье в качестве подгоночной функции для  $Z_n$  можно получить аналитическое выражение.  $Z_n$  равно модифицированной функции Бесселя 1-го рода  $I_n$ . Асимптотика  $I_n$  для больших  $n$  позволяет сделать вывод о сходимости ряда для производящего функционала для большого канонического ансамбля. Для более общего случая  $N$  членов ряда Фурье мы получили рекуррентное соотношение для  $Z_n$ . Используя это рекуррентное

соотношение мы вывели асимптотику для  $Z_n$  при больших  $n$ . С ростом  $N$  убывание  $Z_n$  замедляется, но остается достаточно быстрым для обеспечения сходимости ряда для производящего функционала для большого канонического ансамбля.

Отметим, что другая возможность проверить область применимости нового метода, предложенного в нашей работе, заключается в проведении вычислений в моделях без проблемы знака таких, как КХД с числом цветов равных двум. Мы планируем провести данные проверки в будущем. На данном этапе мы создали необходимые программы и выполнили вычисление барионной плотности в фазе конфайнмента для действительного химического потенциала, публикация [5] в списке публикаций по результатам проекта.

Таким образом, мы предложили новый метод вычисления производящего функционала для канонического ансамбля  $Z_n$ . Мы показали, что метод работает и в фазе деконфайнмента для  $T > T_{RW}$  и в фазе конфайнмента. Данный метод позволил вычислить кварковую плотность  $n_q$ , ее восприимчивость и более высокие моменты, давление для значений химического потенциала, которые находятся за пределами применимости метода разложения в ряд Тейлора. Область применимости нового метода еще предстоит изучить на следующем этапе проекта.

Используя созданную программу для вычисления кирального конденсата мы вычислили киральный конденсат для мнимого химического потенциала для нескольких значений температуры. Для  $T/T_c = 1.35$  и  $0.93$  конденсат растет монотонно, для  $T/T_c = 1.08$  он имеет максимум при  $\mu_q = \pi/3$ . Его зависимость от  $\mu_q$  при этом значении температуры похожа на зависимость поляковской петли. Мы планируем вычислить восприимчивость кирального конденсата для в качестве дополнительной величины, указывающей на точку перехода деконфайнмент - конфайнмент.

На данном этапе мы также предложили новый способ вычисления температуры перехода из адронной фазы в фазу кварк-глюонной плазмы (публикация [4] в списке публикаций по результатам проекта). Он заключается в следующем. Мы вычислили с хорошей точностью давление  $P$  для значений температуры  $T > T_c$  и для  $T < T_c$  для ненулевых значений химического потенциала. Напомним, что везде мы подразумеваем  $T_c = T_c(\mu = 0)$ . Известно, что линия перехода из адронной фазы в фазу кварк-глюонной плазмы в плоскости  $\mu - T$  отклоняется книзу при возрастании  $\mu$ , т. е.  $T_c(\mu) < T_c(0)$ . Это позволяет выполнить экстраполяцию значений давления  $P_{deconf}(\mu, T)$ , полученных для  $T > T_c$  при фиксированном  $\mu$  на значения  $T < T_c$ . С другой стороны, мы вычислили  $P_{conf}(\mu, T)$  для  $T < T_c$ . Точка перехода определяется равенством этих двух функций:

$$P_{deconf}(\mu, T) = P_{conf}(\mu, T).$$

Пока мы имеем  $P_{deconf}(\mu, T)$  только для трех значений температуры, этого недостаточно для выполнения экстраполяции с хорошей точностью. Однако достаточно для целей иллюстрации предложенного метода. Мы выполнили экстраполяцию и получили координаты  $(\mu, T)$  для двух точек на границе фаз:  $(1.25, 0.93)$  и  $(1.41, 0.84)$ . Фитирование полученных значений квадратичной функцией

$$T_c(\mu) / T_c = 1 - C (\mu / T_c)^2$$

дает  $C = 0.07$ , что на удивление хорошо согласуется со значениями, полученными для  $N_f = 2$  КХД другими авторами:  $0.051(3)$  и  $0.065(7)$ .

## 5) Метод канонического ансамбля для случая 2-х химических потенциалов

Метод канонического ансамбля может быть обобщен на случай двух химических потенциалов, барионного и зарядового, что может быть особенно полезным при численном моделировании статистических систем с зарядовой асимметрией, которые возникают, например, при нецентральных столкновениях тяжелых ионов (STAR Collaboration, PRL 113, 092301 (2014)). Для обобщения следует рассматривать химические потенциалы  $u$ - и  $d$ -кварков в качестве независимых, выразить их через

зарядовый и барионный хим. потенциалы и провести преобразование Фурье по обоим мнимым хим. потенциалам. Когда канонические коэффициенты  $Z_{BQ}$  известны, то барионная плотность, зарядовая плотность и кумулянты вычисляются стандартным образом через взятие производных от логарифма большой статистической суммы. Особенность состоит в том, что в описанном подходе кварки могут быть вырождены по массе, но уже не являются вырожденными по мнимому химическому потенциалу. В нашем коде используется техника “even-odd decomposition” для обращения оператора Дирака, поэтому введение различных мнимых химических потенциалов у кварков требует минимальной модификации кода. Однако, проведение двойного преобразования Фурье методом канонического ансамбля, описанным в разделе 4, является весьма трудной задачей с вычислительной точки зрения. Так, если для проведения преобразования Фурье по одному химическому потенциалу требуется сгенерировать ансамбли конфигураций для 40 точек в интервале от 0 до  $\pi/3$ , то для двойного преобразования Фурье требуется уже 400 ансамблей при разных значениях мнимых хим. потенциалов u- и d-кварков, что требует значительных вычислительных мощностей.

Вычисления канонической статсуммы  $Z_{BQ}$  были выполнены на решетке размером  $16^3 \times 4$  при двух температурах  $T/T_c = 0.93$  и  $T/T_c = 1.35$ . Для вычисления фермионного детерминанта использовался метод разложения по хоппинг параметру. В случае конфайнмента коэффициенты  $Z_{BQ}$  были вычислены на 800 конфигурациях, использовалось 20 коэффициентов  $W_n$  при вычислении детерминанта. Для случая деконфайнмента рассматривалось 200 конфигураций и 50 коэффициентов  $W_n$ . Интервал интегрирования по каждому хим. потенциалу разбивался на 512 точек, при расчетах использовалась арифметика повышенной точности (200 знаков после плавающей точки).

Прежде всего стоит отметить, что в методе канонического ансамбля для двух хим. потенциалов возникает та же проблема, что и в обычном методе канонического ансамбля: для данной статистики (числа конфигураций) получаются действительные и положительные  $Z_{BQ}$  только в некотором ограниченном интервале по  $B$  и  $Q$ , дальше начинается чередование знаков действительной части, что говорит о проблеме метода. Например, при  $T/T_c = 0.93$  при  $B = \pm 5$  можно получить действительные и положительные  $Z_{BQ}$  только при  $Q \in (-50; 50)$ . В случае деконфайнмента ситуация лучше, при  $T/T_c = 1.35$  для  $B = \pm 10$  интервал по  $Q$  составляет  $[-120; 120]$ . Данная проблема может быть отражением overlap problem для метода Монте-Карло.

## б) Исследование вязкости.

Мы использовали метод градиентного потока для вычисления коррелятора  $C(t)$  для компонент тензора энергии-импульса (ТЭИ) в случае калибровочной группы  $SU(2)$  на решетке  $48^3 \times 12$  при ненулевой температуре  $T = 1.65 T_c$ . Перенормированный ТЭИ был получен в пределе нулевого времени  $\tau$  процедуры градиентного потока в соответствии с работой Phys.Rev. D90 (2014) 1, 011501. Для вычисления константы связи, необходимой для выполнения перенормировки мы выполнили вычисления при нулевой температуре на решетках до  $78^4$ .

Для изучения роли цвето-магнитных степеней свободы в вязкости мы фиксировали максимальную абелевую калибровку и выполнили выделение так называемой монополярной компоненты калибровочного поля - компоненты, ответственной за появление абелевых цвето-магнитных монополей.

Для этой компоненты калибровочного поля мы также вычислили коррелятор  $C(t)$  для компонент ТЭИ. Сравнение двух корреляторов показало, что монополярный коррелятор убывает с ростом  $t$  намного слабее, чем полный коррелятор. Это подтверждает нашу гипотезу, что в монополярном корреляторе присутствует только инфракрасная компонента спектральной функции полного коррелятора. Мы также вычислили коррелятора  $C(t)$  для компонент тензора энергии-импульса для калибровочного поля с удаленными монополями. Предварительные результаты указывают на то, что безмонополярный коррелятор  $C(t)$  описывается спектральной плотностью, в

которой присутствует только ультрафиолетовая компонента.

Использование метода градиентного потока позволило получить данные результаты на относительно небольшой статистике - 100 конфигураций для монополюсного и безмонополюсного корреляторов и 675 конфигураций для полного коррелятора. Дальнейшее увеличение статистики необходимо для улучшения точности и подтверждения описанных выше выводов.

**Все планируемые на год работы выполнены полностью:**

да

#### **1.4. Сведения о достигнутых конкретных научных результатах в отчетном году**

(до 5 стр.)

1) Программный комплекс был улучшен в четырех направлениях: добавлен preconditioning типа Хазенбуша, что позволило значительно, на 50% повысить эффективность; улучшена архитектура программного кода, что позволили повысить эффективность на 10%; добавлена поддержка вычислений с плавающей запятой, целыми и рациональными числами с произвольной точностью (multiple-precision floating-point); добавлена вычисление кирального конденсата и его восприимчивости.

2) Выполнена генерация конфигураций калибровочного поля на решетках  $8^3 \times 4$  (тестовый размер);  $16^3 \times 4$  (основной размер);  $20^3 \times 4$  (для проверки работы ПК). На решетке  $16^3 \times 4$  конфигурации сгенерированы для 6-ти значений температур, для 20-40 значений мнимого химического потенциала для каждой температуры. Всего, более 400 000 конфигураций.

3-4) Мы представили новый метод вычисления канонической статистической функции  $Z_n$ . Он основан на фитировании мнимой плотности частиц для всех значений мнимого химического потенциала функциями, основанными теоретическими соображениями: полиномиальный фит в фазе деконфайнмента для  $T$  выше  $T_{RW}$  и Фурье-подобный фит в фазе конфайнмента.

Используя результаты фитирования мы вычислили канонические статистические функции  $Z_n$  для 5 значений  $T/T_c$  (все температуры кроме  $T/T_c=1.08$ ) с помощью преобразования Фурье. Было необходимым использование библиотек арифметики произвольной точности (GMP, MPFR, MPFR C++) для вычисления  $Z_n$ , которые изменяются на много порядков. Для всех температур мы проверили, что точность  $Z_n$  была достаточной для воспроизведения плотности частиц  $n_q$ .

При температурах  $T/T_c=1.35$  и  $0.93$  мы сравнили наши результаты для  $Z_n$  с результатами, вычисленными с помощью метода разложения по хоппинг параметру. Мы нашли, что новый метод работает и в фазе конфайнмента и в фазе деконфайнмента: два набора  $Z_n$ , рассчитанные абсолютно независимыми методами, согласуются хорошо. Это означает, что функции фитирования, используемые в данной работе, являются хорошими приближениями для мнимой плотности частиц во всей области значений  $mu_q$ . Более того, это означает, что аналитическое продолжение в область действительного химического потенциала может в принципе быть сделано за пределы применимости разложения в ряд Тейлора, т.к. это аналитическое продолжение совпадает с  $n_q$ , вычисленным с помощью корректно определённых  $Z_n$ . Поэтому новый метод позволяет вычислить плотность частиц  $n_q$  за пределами применимости разложения в ряд Тейлора. Область применимости нового метода неявно определена числом корректных  $Z_n$ . Это число может быть увеличено с помощью улучшения качества приближения мнимой плотности частиц.

Согласие нового метода и метода HPE особенно примечательно в фазе деконфайнмента.

Область деконфайнмента интенсивно исследуется в экспериментах ALICE на LHC. Заметим, что наш новый метод не ограничен ни тяжёлыми массами кварков как HPE ни маленькими значениями  $m_q$  как разложение в ряд Тейлора. После того, как мы вычислили  $Z_n$  используя новый метод, мы можем вычислить любую термодинамическую величина: давление, плотность частиц и их высшие моменты. Поэтому новый метод может предоставить достоверный теоретический базис для результатов LHC. Мы планируем вычислить эти величины с гораздо меньшими массами кварков с целью предоставления теоретических результатов, основанных на первопринципах, для сравнения с данными LHC. Мы полагаем, что новый метод также поможет определить линию фазового перехода в плоскости температура - химический потенциал. Соответствующие результаты будут представлены в следующей публикации после того, как будет улучшена статистика и получены результаты для меньших масс кварков.

Используя наши результаты для плотности частиц  $n_{\{q\}}$  мы вычислили коэффициенты разложения в ряд Тейлора, из которых соответствующие коэффициенты для давления могут быть легко восстановлены. Мы получили хорошее согласие с предыдущими результатами, где данные коэффициенты были вычисленными напрямую. Более того мы нашли, что наши ошибки для этих коэффициентов в общем значительно меньше ошибок представленных в [10]. Наши оценки для коэффициента Тейлора  $c_6$ , который не был вычислен в [10], находятся в качественном согласии с результатами работ [11] и [12].

Мы нашли, что значения  $Z_n$  полученные при  $T/T_c=1.35$  хорошо описываются с помощью экспоненциального поведения с полиномом в экспоненте. Мы проверили, что этот фит хорошо работает в области  $n$  вплоть до 300, это соответствует кварковой плотности  $n_q/T^3$  примерно 5. Для  $T < T_c$  мы получили асимптотику  $Z_n$  при больших  $n$ , указывающую на меньшую скорость убывания  $Z_n$  с  $n$ , чем в фазе деконфайнмента. Тем не менее, все еще эта скорость убывания достаточно высока, чтобы сходимость бесконечных сумм была удовлетворена.

На данном этапе мы также предложили новый способ вычисления температуры перехода из адронной фазы в фазу кварк-глюонной плазмы. Он заключается в следующем. Мы вычислили с хорошей точностью давление  $P(\mu, T)$  для значений температуры  $T > T_c$  и для  $T < T_c$  для ненулевых значений химического потенциала. Напомним, что везде мы подразумеваем  $T_c = T_c(\mu=0)$ . Известно, что линия перехода из адронной фазы в фазу кварк-глюонной плазмы в плоскости  $\mu - T$  отклоняется вниз при возрастании  $\mu$ , т. е.  $T_c(\mu) < T_c$ . Это позволяет выполнить экстраполяцию значений давления  $P_{deconf}(\mu, T)$ , полученных для  $T > T_c$  при фиксированном  $\mu$  на значения  $T < T_c$ . С другой стороны, мы вычислили  $P_{conf}(\mu, T)$  для  $T < T_c$ . Точка перехода определяется равенством этих двух функций:  $P_{deconf}(\mu, T) = P_{conf}(\mu, T)$ . Пока мы вычислили  $P_{deconf}(\mu, T)$  только для трех значений температуры, этого недостаточно для выполнения экстраполяции с хорошей точностью. Однако достаточно для целей иллюстрации предложенного метода. Мы выполнили экстраполяцию и получили координаты  $(\mu, T)$  для двух точек на границе фаз: (1.25, 0.93) и (1.41, 0.84). Фитирование полученных значений квадратичной функцией  $T_c(\mu)/T_c = 1 - C(\mu/T_c)^2$  дает  $C=0.07$ , что на удивление хорошо согласуется со значениями, полученными для  $N_f=2$  КХД другими авторами: 0.051(3) и 0.065(7).

5) Метод канонического ансамбля сформулирован для случая двух химических потенциалов - барионного  $\mu_B$  и зарядового  $\mu_Q$ . Вычисления канонической статсуммы  $Z_{\{BQ\}}$  выполнены на решетке размером  $16^3 \times 4$  при двух температурах  $T/T_c = 0.93$  и  $T/T_c = 1.35$  с использованием метода разложения по хоппинг параметру. Показано, что вычисления могут быть выполнены в широком, но ограниченном диапазоне значений  $B$  и  $Q$ .

6) Мы использовали метод градиентного потока для вычисления коррелятора  $C(t)$  для компонент тензора энергии-импульса (ТЭИ) в случае калибровочной группы  $SU(2)$  на решетке  $48^3 \times 12$  при ненулевой температуре  $T = 1.65 T_c$ . Перенормированный ТЭИ был получен в пределе нулевого времени  $\tau$  процедуры градиентного потока в соответствии с работой Phys.Rev. D90 (2014) 1, 011501.

Полученные результаты подтверждают нашу гипотезу, что в монопольном корреляторе присутствует только инфракрасная компонента спектральной функции полного коррелятора. Мы также вычислили коррелятора для компонент тензора энергии-импульса для калибровочного поля с удаленными монополями. Предварительные результаты указывают на то, что безмонопольный коррелятор  $C(t)$  описывается спектральной плотностью, в которой присутствует только ультрафиолетовая компонента. Использование метода градиентного потока позволило получить данные результаты на относительно небольшой статистике - 100 конфигураций для монопольного и безмонопольного корреляторов и 675 конфигураций для полного коррелятора.

**Все запланированные в отчетном году научные результаты достигнуты:**  
да

### **1.5. Описание выполненных в отчетном году работ и полученных научных результатов для публикации на сайте РФФИ**

*на русском языке (до 3 страниц текста, также указываются ссылки на информационные ресурсы в сети Интернет (url-адреса), посвященные проекту)*

Проект направлен на исследование Квантовой хромодинамики (КХД) - теории сильных взаимодействий - при экстремальных условиях - высокой температуре и ненулевой барионной плотности. КХД характеризуется значительными непертурбативными эффектами на больших расстояниях, результаты экспериментов указывают на то, что эти эффекты сильны и в изучаемой нами области параметров. Получить количественные предсказания для таких непертурбативных эффектов из первых принципов квантовой теории поля возможно только с помощью метода решеточной регуляризации. Эта формулировка КХД, называемая решеточной КХД, позволяет прямое вычисление функционального интеграла путем численного моделирования на наиболее мощных современных суперкомпьютерах.

Эксперименты по столкновению тяжелых ионов на коллайдерах RHIC (Брукхейвен) и LHC (ЦЕРН) в которых изучаются свойства недавно открытого состояния вещества — кварк-глюонной плазмы, являются едва ли не самыми интересными экспериментами в настоящее время в области физики элементарных частиц. Для полноценного исследования свойств кварк-глюонной плазмы теоретическими методами необходимо проводить вычисления при высокой температуре и конечном барионном химическом потенциале. Для конечной барионной плотности решеточная КХД сталкивается с проблемой. Действие теории становится комплексным (“проблема знака”), из-за чего численное моделирование известными методами становится невозможным. Данный проект направлен на решение этой проблемы в рамках решеточной КХД и получение новых теоретических результатов для свойств кварк-глюонной плазмы.

В рамках 2-го этапа проекта была значительно улучшена эффективность созданного на 1-м этапе программного комплекса (ПК) для вычислений в решеточной КХД с ненулевым химическим потенциалом на суперкомпьютере с гибридной архитектурой. Такой ПК был создан российской группой впервые. ПК реализует алгоритм гибридного Монте Карло для выбранного вида решеточного действия, включая возможность ненулевого (мнимого) кваркового химического потенциала. Важным свойством созданного ПК является то, что большая часть вычислительных операций (более 99 %) выполняется на графической подсистеме современных компьютеров

(GPU), так как прежде всего этот комплекс предназначен для работы на суперкомпьютере «Восток 1» ДВФУ. В 2016 году ПК был улучшен в четырех направлениях: добавлен preconditioning типа Хазенбуша, что позволило значительно, на 50% повысить эффективность; улучшена архитектура программного кода, что позволили повысить эффективность на 10%; добавлена поддержка вычислений с плавающей запятой, целыми и рациональными числами с произвольной точностью (multiple-precision floating-point); добавлено вычисление кирального конденсата и его восприимчивости. Выполнена генерация конфигураций калибровочного поля на решетках размера  $16^3 \times 4$  для шести значений температуры выше и ниже  $T_c$  - температуры перехода при нулевом химическом потенциале. Для каждого значения температуры конфигурации генерировались для 20-40 значений мнимого химического потенциала. Всего было сгенерировано и использовано в вычислениях более 400 000 конфигураций.

В 2016 году был разработан новый метод вычисления канонической статистической функции  $Z_n$ . Он основан на фитировании мнимой плотности частиц для всех значений мнимого химического потенциала функциями, основанными теоретическими соображениями: полиномиальный фит в фазе деконфайнмента для  $T$  выше  $T_{RW}$  и Фурье-подобный фит в фазе конфайнмента. Используя результаты фитирования мы вычислили канонические статистические функции  $Z_n$  для 5 значений  $T/T_c$  (все температуры кроме  $T/T_c=1.08$ ) с помощью преобразования Фурье. При вычислениях  $Z_n$  оказалось необходимым использование библиотек арифметики произвольной точности (GMP, MPFR и MPFR C++), т.к.  $Z_n$  убывает быстро с ростом  $n$  до значения порядка  $10^{-700}$  при  $n=300$ . Для всех значений температуры мы проверили, что точность вычисления  $Z_n$  была достаточной для воспроизведения исходной кварковой плотности  $n_q$ .

При температурах  $T/T_c=1.35$  и  $0.93$  мы сравнили результаты для  $Z_n$ , полученные новым методом, с результатами, вычисленными с помощью известного метода разложения по хоппинг параметру (hopping parameter expansion, HPE). Это сравнение позволило сделать вывод, что новый метод работает и в фазе конфайнмента, и в фазе деконфайнмента: два набора  $Z_n$ , рассчитанные абсолютно независимыми методами, согласуются хорошо. Это означает, что функции фитирования мнимой кварковой плотности  $n_q$ , используемые в данной работе, обеспечивают хорошее приближение для численных данных во всей области значений мнимого химического потенциала  $mu_q$ . Более того, это означает, что аналитическое продолжение в область действительного химического потенциала может в принципе быть сделано за пределы применимости разложения в ряд Тейлора, т.к. это аналитическое продолжение совпадает с кварковой  $n_q$ , вычисленным с помощью корректно определённых  $Z_n$ . Поэтому новый метод позволяет вычислить кварковую плотность  $n_q$  за пределами применимости разложения в ряд Тейлора. Область применимости нового метода неявно определена числом корректно вычисленных  $Z_n$ . Это число может быть увеличено с помощью улучшения качества приближения мнимой плотности частиц.

Согласие нового метода и метода HPE особенно примечательно в фазе деконфайнмента. Область деконфайнмента интенсивно исследуется в экспериментах ALICE на LHC. Заметим, что наш новый метод не ограничен ни тяжёлыми массами кварков как метод HPE, ни малыми значениями химического потенциала  $mu_q$ , как метод разложение в ряд Тейлора. После того, как мы вычислили  $Z_n$ , используя новый метод, мы можем вычислить любую термодинамическую величину: давление, плотность частиц, восприимчивость и более высокие моменты. Выполнив вычисления для нескольких значений температуры мы также можем вычислить плотность энергии. Поэтому новый метод может предоставить достоверный теоретический базис для объяснения результатов эксперимента ALICE. Мы планируем вычислить указанные физические величины с гораздо меньшими, чем сейчас, значениями массы кварков. Новый метод также поможет определить линию фазового перехода в плоскости температура - химический потенциал. Соответствующие результаты будут получены в 2017 году после того как будет улучшена статистика и получены результаты для меньших масс кварков.

Используя наши результаты для плотности частиц  $n_{\{q\}}$  мы вычислили коэффициенты разложения в ряд Тейлора, из которых соответствующие коэффициенты для давления могут быть легко восстановлены. Мы получили хорошее согласие результатами других групп, которые вычисляли эти коэффициенты напрямую. Более того, наши ошибки для этих коэффициентов в общем случае значительно меньше ошибок представленных в этих работах.

Мы вычислили асимптотики для  $Z_n$  при больших значениях  $n$ , что является важным, т.к. позволяет убедиться в сходимости бесконечных сумм связывающих большой канонический и канонический ансамбли.

На данном этапе также был предложен новый способ вычисления температуры перехода из адронной фазы в фазу кварк-глюонной плазмы. Он заключается в следующем. Мы вычислили с хорошей точностью давление  $P(\mu, T)$  для значений температуры  $T > T_c$  и для  $T < T_c$  для ненулевых значений химического потенциала. Напомним, что везде мы подразумеваем  $T_c = T_c(\mu=0)$ . Известно, что линия перехода из адронной фазы в фазу кварк-глюонной плазмы в плоскости  $\mu - T$  отклоняется вниз при возрастании  $\mu$ , т. е.  $T_c(\mu) < T_c$ . Это позволяет выполнить экстраполяцию значений давления  $P_{\text{deconf}}(\mu, T)$ , полученных для  $T > T_c$  при фиксированном  $\mu$  на значения  $T < T_c$ . С другой стороны, мы вычислили  $P_{\text{conf}}(\mu, T)$  для  $T < T_c$ . Точка перехода определяется равенством этих двух функций:  $P_{\text{deconf}}(\mu, T) = P_{\text{conf}}(\mu, T)$ . Пока мы вычислили  $P_{\text{deconf}}(\mu, T)$  только для трех значений температуры, этого недостаточно для выполнения экстраполяции с хорошей точностью. Однако достаточно для целей иллюстрации предложенного метода. Мы выполнили экстраполяцию и получили координаты  $(\mu, T)$  для двух точек на границе фаз: (1.25, 0.93) и (1.41, 0.84). Фитирование полученных значений квадратичной функцией  $T_c(\mu)/T_c = 1 - C(\mu/T_c)^2$  дает  $C=0.07$ , что на удивление хорошо согласуется со значениями, полученными для  $N_f=2$  КХД другими авторами: 0.051(3) и 0.065(7).

Публикации в 2016 году по результатам проекта:

1. Borneyakov V., Boyda D., Goy V., Molochkov A., Nakamura A., Nikolaev A., Zakharov V.I. Lattice QCD for Baryon Rich Matter – Beyond Taylor Expansions. Nuclear Physics A956 (2016) 809-812; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947416001573>
2. Борняков В.Г., Бойда Д.Л., Гой В.А., Захаров В.И., Молочков А.В., Накамура А., Николаев А.А. Новый подход к вычислению канонического производящего функционала в решеточной КХД при конечном химическом потенциале. Письма в ЖЭТФ т.104, номер10, стр.673; [http://www.jetpletters.ac.ru/ps/2141/article\\_32122.shtml](http://www.jetpletters.ac.ru/ps/2141/article_32122.shtml)
3. Borneyakov V.G., Boyda D.L., Goy V.A., Molochkov A.V., Nakamura A., Nikolaev A.A., Zakharov V.I. How to use Lattice and Experimental data for QCD Critical Point Search. Принято к публикации в Acta Physica Polonica B.
4. V. G. Borneyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov. Study of lattice QCD at finite chemical potential using the canonical ensemble approach. Принято к публикации в EPJ Web of Conferences. <https://arxiv.org/pdf/1611.09768v1.pdf>
5. Braguta V.V., Ilgenfritz E.-M., Kotov A.Yu., Molochkov A.V., Nikolaev A.A. Study of the phase diagram of dense two-color QCD within lattice simulation Принято к публикации в Physical Review D. <https://arxiv.org/pdf/1605.04090.pdf>
6. Etsuko Itou, Keitaro Nagata, Yoshiyuki Nakagawa, Atsushi Nakamura, V.I. Zakharov. Entanglement in Four-Dimensional SU(3) Gauge Theory. Progress of Theoretical and Experimental Physics 2016 (2016) no.6, 061B01
7. V.G. Borneyakov, D.L. Boyda, V.A. Goy, A.V. Molochkov, Atsushi Nakamura, A.A. Nikolaev, V.I. Zakharov. New approach to canonical partition functions computation in  $N_f=2$  lattice QCD at finite baryon density Направлено в Phys. Rev. D. e-Print: arXiv:1611.04229.
8. V.A. Goy, V. Borneyakov, D. Boyda, A. Molochkov, A. Nakamura, A. Nikolaev, V. Zakharov. Sign problem in finite density lattice QCD.

**на английском языке**

The project aims at the study of the Quantum Chromodynamics (QCD) - the theory of strong interactions. It is well known that this theory has important nonperturbative effects at large distances. To get the quantitative results for the nonperturbative effects from the first principles of the quantum field theory is only possible when using the lattice regularization by means of numerical simulations on the most powerful supercomputers. Experiments in heavy-ion collisions at the collider RHIC (Brookhaven) and LHC (CERN), in which the properties of the recently discovered state of matter - the quark-gluon plasma, are perhaps the most interesting experiments in the field of elementary particle physics. To study the properties of quark-gluon plasma by theoretical methods it is necessary to carry out computations at finite temperature and finite baryon chemical potential. For finite baryon density lattice QCD is faced with the fact that the action becomes complex ("sign problem"), for this reason numerical simulations by the known methods is impossible. This project aims to solve this problem and to obtain new theoretical results for the properties of quark-gluon plasma.

We have presented new method to compute the canonical partition functions  $Z_n$ . It is based on fitting of the imaginary number density for all values of imaginary chemical potential to the theoretically motivated fitting functions: polynomial fit in the deconfinement phase for  $T$  above  $T_{RW}$  and Fourier type fit in the confinement phase. Using fit results we compute canonical partition functions  $Z_n$  at 5 values of  $T$  (all temperatures apart from  $T/T_c = 1.08$ ) via Fourier transformation. It was necessary to use the multiprecision library to compute  $Z_n$  which change over many orders of magnitude. For all temperatures we have checked that precision of computation of  $Z_n$  was high enough to reproduce the imaginary number density  $n_{qI}$ .

At temperatures  $T/T_c = 1.35$  and  $0.93$  we compared our results for  $Z_n$  with  $Z_n$  computed by hopping parameter expansion. We found that the new method works in both confinement and deconfinement phases: two sets of  $Z_n$  computed by completely independent methods agree well. This means that the fitting functions used in this work are proper approximations for the imaginary number density in the full range of  $\mu_{qI}$  values. Furthermore, this means that the analytical continuation to the real chemical potential can in principle be done beyond the Taylor expansion validity range since this analytical continuation coincides with  $n_q$  computed with the help of correctly determined  $Z_n$ . Thus the new method allows to compute the number density  $n_q$  beyond Taylor expansion. The range of validity of new method is implicitly determined by the number of correctly computed  $Z_n$ . This number can be increased by increasing the quality of approximation of imaginary number density. This can be achieved when more terms in fitting functions are determined via fitting procedure or via direct numerical computation of the integral.

The agreement of the new method and HPE method is especially remarkable in the deconfining phase. The deconfinement region is being explored extensively by ALICE experiments at LHC. Note that our new method is not limited to the heavy quark mass values like HPE, nor to small  $\mu_q$  values like Taylor expansion. Once we calculated  $Z_n$  using new method, we can calculate any thermodynamical quantity like pressure, number density and its higher moments. Thus the new method can provide very reliable theoretical basis for LHC results. We believe that the new method will also help to determine the transition line in the temperature - chemical potential plane. Respective results will be presented in a forthcoming publication after data with higher statistics will be accumulated and results for lower quark masses will be obtained.

Using our results for the number density  $n_{qI}$  we computed the Taylor expansion coefficients for the number density from which respective coefficients for the pressure are easily restored. We found good agreement with earlier results obtained via direct computation of these coefficients. Moreover we found that our error bars for these coefficients are in general substantially smaller than error bars obtained via direct computation. We found asymptotics of  $Z_n$  at large  $n$  which is important to show convergence of

infinite sums.

Using the results for the number density  $n_q$  we can compute the temperature of the transition from the hadron phase to the quark-gluon plasma phase using the following procedure. Our results for the number density at temperatures  $T > T_c$  as function of the chemical potential  $\mu_q$  are reliable even for large  $\mu_q$ . We can use these results to compute the pressure  $\Delta P_{\text{deconf}}(T; \mu_q) = P(T; \mu_q) - P(T; 0)$  as function of  $\mu_q$  and then extrapolate the pressure for fixed  $\mu_q$  to temperatures  $T < T_c$ . To obtain a good extrapolation we need the pressure computed for more values of temperature than is available now. But three values which we have now are sufficient to demonstrate the idea. We then find the transition temperature  $T_c(\mu_q)$  solving numerically the equation  $\Delta P_{\text{deconf}}(T; \mu_q) = \Delta P_{\text{conf}}(T; \mu_q)$ , where  $\Delta P_{\text{conf}}(T; \mu_q)$  is the excess pressure obtained from the number density in the confined phase. We made extrapolation and obtained two points on the phase boundary: (1.25, 0.93) and (1.41, 0.84). We made fitting with function

$T_c(\mu_q) / T_c = 1 - C (\mu_q / T_c)^2$  which gave value of constant  $C=0.07$ . This value is in surprisingly good agreement with values obtained by other groups for  $N_f=2$  QCD: 0.051(3) и 0.065(7).

Publications in 2016 :

1. Bornyakov V., Boyda D., Goy V., Molochkov A., Nakamura A., Nikolaev A., Zakharov V.I. Lattice QCD for Baryon Rich Matter – Beyond Taylor Expansions. Nuclear Physics A956 (2016) 809-812; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947416001573>
2. Bornyakov V., Boyda D., Goy V., Molochkov A., Nakamura A., Nikolaev A., Zakharov V.I. New method to compute canonical partition functions in lattice QCD at finite chemical potential. JETP Letters v.104 , N10, p.673; [http://www.jetpletters.ac.ru/ps/2141/article\\_32122.shtml](http://www.jetpletters.ac.ru/ps/2141/article_32122.shtml)
3. Bornyakov V.G., Boyda D.L., Goy V.A., Molochkov A.V., Nakamura A., Nikolaev A.A., Zakharov V.I. How to use Lattice and Experimental data for QCD Critical Point Search. Accepted for publication in Acta Physica Polonica B .
4. V. G. Bornyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov. Study of lattice QCD at finite chemical potential using the canonical ensemble approach. Accepted for publication in EPJ Web of Conferences. <https://arxiv.org/pdf/1611.09768v1.pdf>
5. Braguta V.V., Ilgenfritz E.-M., Kotov A.Yu., Molochkov A.V., Nikolaev A.A. Study of the phase diagram of dense two-color QCD within lattice simulation Accepted for publication in Physical Review D . <https://arxiv.org/pdf/1605.04090.pdf>
6. Etsuko Itou, Keitaro Nagata, Yoshiyuki Nakagawa, Atsushi Nakamura, V.I. Zakharov. Entanglement in Four-Dimensional SU(3) Gauge Theory. Progress of Theoretical and Experimental Physics 2016 (2016) no.6, 061B01
7. V.G. Bornyakov, D.L. Boyda, V.A. Goy, A.V. Molochkov, Atsushi Nakamura, A.A. Nikolaev, V.I. Zakharov. New approach to canonical partition functions computation in  $N_f=2$  lattice QCD at finite baryon density Submitted to Phys. Rev. D. e-Print: arXiv:1611.04229.
8. V.A. Goy, V. Bornyakov, D. Boyda, A. Molochkov, A. Nakamura, A. Nikolaev, V. Zakharov. Sign problem in finite density lattice QCD. Submitted to Progress of Theoretical and Experimental Physics. e-Print: arXiv:1611.08093

## 1.6. Файл с дополнительными материалами

*(при необходимости представления экспертному совету РНФ дополнительных графических материалов к отчету по проекту)*

В формате pdf, до 3 Мб. [Скачать...](#)

## 1.7. Перечень публикаций за год по результатам проекта

*(публикации добавляются из списка зарегистрированных участниками проекта публикаций)*

1. Борняков В., Бойда Д., Гой В., Молочков А., Накамура А., Николаев А., Захаров В.И. (Bornyakov V.G., Boyda D.L., Goy V.A., Molochkov A.V., Nakamura A., Nikolaev A.A., Zakharov V.I.)  
Проект № 15-12-20008/2016 Страница 17 из 36

V., Boyda D., Goy V., Molochkov A., Nakamura A., Nikolaev A., Zakharov V.I.) **Lattice QCD for Baryon Rich Matter – Beyond Taylor Expansions** Nuclear Physics A (2016 г.)

---

2. Борняков В.Г., Бойда Д.Л., Гой В.А., Захаров В.И., Молочков А.В., Накамура А., Николаев А.А. (V. G. Borneyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, V. I. Zakharov, A. V. Molochkov, Atsushi Nakamura, A. A. Nikolaev) **Новый подход к вычислению канонического производящего функционала в решеточной КХД при конечном химическом потенциале** Письма в ЖЭТФ (2016 г.)

---

3. Борняков В.Г., Бойда Д.Л., Гой В.А., Молочков А.В., Накамура А., Николаев А.А., Захаров В.И. (Borneyakov V.G., Boyda D.L., Goy V.A., Molochkov A.V., Nakamura A., Nikolaev A.A., Zakharov V.I.) **How to use Lattice and Experimental data for QCD Critical Point Search** Acta Physica Polonica B (2016 г.)

---

4. Борняков В.Г., Бойда Д.Л., Гой В.А., Молочков А.В., Накамура А., Николаев А.А., Захаров В.И. (V. G. Borneyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov) **Study of lattice QCD at finite chemical potential using the canonical ensemble approach** EPJ Web of Conferences (2016 г.)

---

5. Брагута В.В., Ильгенфритц Е.-М., Котов А.Ю., Молочков А.В., Николаев А.А. (Braguta V.V., Ilgenfritz E.-M., Kotov A.Yu., Molochkov A.V., Nikolaev A.A.) **Study of the phase diagram of dense two-color QCD within lattice simulation** Physical Review D (2016 г.)

---

6. Е. Ито, К. Нагата, О. Накагава, А. Накамура, В.И. Захаров (Etsuko Itou, Keitaro Nagata, Yoshiyuki Nakagawa, Atsushi Nakamura, V.I. Zakharov) **Entanglement in Four-Dimensional SU(3) Gauge Theory** Progress of Theoretical and Experimental Physics (2016 г.)

---

1.8. В 2016 году возникли исключительные права на результаты интеллектуальной деятельности, созданные при выполнении проекта:

нет

## 1.9. Показатели реализации проекта

Плановые значения указываются только для показателей, предусмотренных соглашением

**Показатели кадрового состава научного коллектива** (рассчитываются как округленное до целого отношение суммы количества месяцев, в которых действовали в отчетном периоде в отношении членов научного коллектива приказы о составе научного коллектива, к количеству месяцев, в которых действовало в отчетном периоде соглашение)

Показатели	Единица измерения	2016 год	
		план	факт
Число членов научного коллектива	человек	10	10
Число исследователей в возрасте до 39 лет среди членов научного коллектива	человек	5	5
в том числе:			
кандидатов наук в возрасте до 35 лет (включительно)	человек		2
аспирантов (интернов, ординаторов) и (или) студентов очной формы обучения	человек		2
Количество лиц категории «Вспомогательный персонал»	человек		0

**Публикационные показатели реализации проекта** (нарастающим итогом, за исключением показателя «Число цитирований публикаций членов научного коллектива в научных журналах, индексируемых в международной базе данных «Сеть науки» (Web of Science) в отчетном году», значения показателей формируются автоматически на основе данных, представленных в форме 2о)

Показатели публикационной активности приводятся в отношении публикаций, имеющих соответствующую ссылку на поддержку Российского научного фонда и на организацию (в последнем случае – за исключением публикаций, созданных в рамках оказания услуг сторонними организациями).

Показатели	Единица измерения	2015 - 2016 г.	
		план	факт
Количество публикаций по проекту членов научного коллектива в рецензируемых российских и зарубежных научных изданиях, индексируемых в базах данных «Сеть науки» (Web of Science) или «Скопус» (SCOPUS)	Ед.	5	6
Число цитирований публикаций членов научного коллектива в научных журналах, индексируемых в международной базе данных «Сеть науки» (Web of Science) в отчетном году	Ед.	0	0
Количество монографий по проекту членов научного коллектива	Ед.	0	0
Количество зарегистрированных результатов интеллектуальной деятельности по проекту членов научного коллектива	Ед.		0

## 1.10. Информация о представлении достигнутых научных результатов на научных мероприятиях (конференциях, симпозиумах и пр.)

(в том числе форма представления – приглашенный доклад, устное выступление, стендовый доклад и пр.)

- 1) Накамура А., устный доклад 'How to use Lattice and Experimental data for QCD Critical Point Search', International conference 'Critical Point and Onset of Deconfinement', 30 мая - 4 июня, 2016, Вроцлав, Польша
- 2) Накамура А., устный доклад 'Fighting against Negative Probability -- Sign problem in Quark-Gluon plasma simulations', International Workshop on Applied Probability (IWAP2016), June 20-23, 2016 Toronto, Canada.
- 3) Накамура А., приглашенный доклад, "Theory of Hadronic Matter under Extreme Conditions", Международная Сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН 12 - 15 апреля, 2016, ОИЯИ Дубна.

- 4) Накамура А., устный доклад "A new method in lattice QCD with multi-precision calculations", Annual meeting of The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, September 11, 2016.
- 5) Борняков В.Г., устный доклад 'Study of lattice QCD at finite chemical potential using canonical ensemble approach', XXIII International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems "Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics", 19-23 сентября 2016, Дубна
- 6) Борняков В.Г., устный доклад, 'Dyons and Roberge - Weiss transition in lattice QCD', XIIIth International conference 'Quark Confinement and the Hadron Spectrum', 28 августа - 4 сентября 2016, Салоники, Греция
- 7) Борняков В.Г., устный доклад 'N<sub>f</sub>=2 lattice QCD at finite density using canonical ensemble method', Meeting of the working group on theory of hadronic matter under extreme conditions, Dubna, October 31-November 3, 2016 .
- 8) Борняков В.Г., устный доклад 'Proposal for determination of the phase transition line in mu-T plane', International Workshop 'Monte Carlo methods in modeling of complex systems' 7-12 ноября, 2016, ДВФУ, Владивосток.
- 9) Николаев А.А., устный доклад 'Study of lattice QCD at finite baryon density using the canonical approach', XIIIth Quark Confinement and the Hadron Spectrum, 28 августа - 4 сентября 2016, Салоники, Греция
- 10) Гой В.А., устный доклад 'Zn computations using GPGPU', Japanese-German Seminar Phase structure of lattice field theories, 26-28 сентября, 2016, Ниигата, Япония.
- 11) Гой В.А., устный доклад 'Zn computations using GPGPU', International Workshop 'Monte Carlo methods in modeling of complex systems' 7-12 ноября, 2016, ДВФУ, Владивосток.
- 12) Бойда Д.Л., устный доклад 'Determination of QCD phase transition line in the canonical approach', Japanese-German Seminar Phase structure of lattice field theories, 26-28 сентября, 2016, Ниигата, Япония.
- 13) Бойда Д.Л., устный доклад 'Determination of QCD phase transition line in the canonical approach', International Workshop 'Monte Carlo methods in modeling of complex systems' 7-12 ноября, 2016, ДВФУ, Владивосток.

**1.11. Все публикации, информация о которых представлена в пункте 1.9, имеют указание на получение финансовой поддержки от Фонда:**

да

**1.12. Информация (при наличии) о публикациях в СМИ, посвященных результатам проекта нет**

Настоящим подтверждаю:

- самостоятельность и авторство текста отчета о выполнении проекта;
- что при обнародовании результатов выполненного в рамках поддержанного РНФ проекта научный коллектив ссылался на получение финансовой поддержки проекта от РНФ и на организацию, на базе которой выполнялось исследование;
- что согласен с опубликованием РНФ сведений из отчета о выполнении проекта, в том числе в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»;
- что проект не имеет других источников финансирования;
- что проект не является аналогичным\* по содержанию проекту, одновременно финансируемому из других источников.

\* Проекты, аналогичные по целям, задачам, объектам, предметам и методам исследований, а также ожидаемым результатам. Экспертиза на совпадение проводится экспертным советом Фонда.

Подпись руководителя проекта \_\_\_\_\_ /А.Накамура/

Сведения о публикациях по результатам проекта  
№ 15-12-20008  
«Исследование кварк-глюонной плазмы методами решеточной  
КХД»,  
в 2016 году

Приводится в отношении публикаций, имеющих соответствующую ссылку на поддержку РФФ.

(заполняется отдельно на каждую публикацию, для формирования п. 1.7. отчета)

В карточке публикации все данные приводятся на языке и в форме, используемой базами данных «Сеть науки» (Web of Science), «Скопус» (Scopus) и/или РИНЦ, каждая статья упоминается только один раз (независимо от языков опубликования).

1

## 2.1. Авторы публикации

**на русском языке:** Борняков В., Бойда Д., Гой В., Молочков А., Накамура А., Николаев А., Захаров В.И.

**на английском языке:** Bornyakov V., Boyda D., Goy V., Molochkov A., Nakamura A., Nikolaev A., Zakharov V.I.

**WoS Researcher ID (при наличии):** A-7474-2014

**Scopus AuthorID (при наличии):** ---

## 2.2. Название публикации

Lattice QCD for Baryon Rich Matter – Beyond Taylor Expansions

## 2.3. Год публикации

2016

## 2.4. Ключевые слова

Finite density, Lattice QCD, Phase Diagram, Canonical approach

## 2.5. Вид публикации

статья

## 2.6. Название издания (для монографий также указываются название издательства, город)

Nuclear Physics A

**ISSN (при наличии):** 0375-9474

**e-ISSN (при наличии):** ---

**ISBN (при наличии):** ---

## 2.7. Выходные данные публикации (номер, том, выпуск, страницы, реквизиты документа о регистрации исключительных прав)

v. 956, pp. 809-812

**Месяц и год публикации:** 12.2016

**Адрес электронной версии публикации (URL) в открытом источнике (при наличии):**

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947416001573>

## 2.8. DOI (при наличии)

10.1016/j.nuclphysa.2016.02.070

**Accession Number WoS (при наличии):** ---

**Scopus EID (при наличии):** ---

**2.9. Принята к публикации (указывается в случае официального принятия к публикации в последующих изданиях, положительного решения о регистрации исключительных прав)**

Для принятых к публикации материалов п. 2.7 не заполняются.

---

**Письмо из редакции или издательства с извещением о принятии рукописи к публикации:** ---

**2.10. Издание индексируется базой данных Web of Science Core Collection**

да

**2.11. Импакт-фактор издания**

1.258

**2.12. Издание индексируется базой данных Scopus**

да

**2.13. Издание индексируется базой данных РИНЦ**

да

**2.14. Публикация аффилирована с организацией**

да

**2.15. В публикации:**

**В качестве источника финансирования исследования указан грант Российского научного фонда**

да

**Указаны иные источники финансирования (в том числе указаны несколько грантов Российского научного фонда), помимо данного гранта Российского научного фонда**

нет

**2.16. Файл с текстом публикации**

---

**2.1. Авторы публикации**

**на русском языке:** Борняков В.Г., Бойда Д.Л., Гой В.А., Захаров В.И., Молочков А.В., Накамура А., Николаев А.А.

**на английском языке:** V. G. Bornyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, V. I. Zakharov, A. V. Molochkov, Atsushi Nakamura, A. A. Nikolaev

**WoS Researcher ID (при наличии):** ---

**Scopus AuthorID (при наличии):** ---

**2.2. Название публикации**

Новый подход к вычислению канонического производящего функционала в решеточной КХД при конечном химическом потенциале

**2.3. Год публикации**

2016

**2.4. Ключевые слова**

барионный химический потенциал, канонический производящий функционал, решеточная КХД, фаза деконфайнмента

## 2.5. Вид публикации

статья

## 2.6. Название издания (для монографий также указываются название издательства, город)

Письма в ЖЭТФ

ISSN (при наличии): 0021-3640

e-ISSN (при наличии): ---

ISBN (при наличии): ---

## 2.7. Выходные данные публикации (номер, том, выпуск, страницы, реквизиты документа о регистрации исключительных прав)

т. 104, номер 10, стр. 673-677

Месяц и год публикации: 11.2016

Адрес электронной версии публикации (URL) в открытом источнике (при наличии):

[http://www.jetpletters.ac.ru/ps/2141/article\\_32122.shtml](http://www.jetpletters.ac.ru/ps/2141/article_32122.shtml)

## 2.8. DOI (при наличии)

---

Accession Number WoS (при наличии): ---

Scopus EID (при наличии): ---

## 2.9. Принята к публикации (указывается в случае официального принятия к публикации в последующих изданиях, положительного решения о регистрации исключительных прав)

Для принятых к публикации материалов п. 2.7 не заполняются.

---

Письмо из редакции или издательства с извещением о принятии рукописи к публикации: ---

## 2.10. Издание индексируется базой данных Web of Science Core Collection

да

## 2.11. Импакт-фактор издания

1.172

## 2.12. Издание индексируется базой данных Scopus

да

## 2.13. Издание индексируется базой данных РИНЦ

да

## 2.14. Публикация аффилирована с организацией

да

## 2.15. В публикации:

В качестве источника финансирования исследования указан грант Российского научного фонда

да

Указаны иные источники финансирования (в том числе указаны несколько грантов Российского научного фонда), помимо данного гранта Российского научного фонда

нет

## 2.16. Файл с текстом публикации

---

### 2.1. Авторы публикации

*на русском языке:* Борняков В.Г., Бойда Д.Л., Гой В.А., Молочков А.В., Накамура А., Николаев А.А., Захаров В.И.

*на английском языке:* Bornyakov V.G., Boyda D.L., Goy V.A., Molochkov A.V., Nakamura A., Nikolaev A.A., Zakharov V.I.

**WoS Researcher ID (при наличии):** A-7474-2014

**Scopus AuthorID (при наличии):** ---

### 2.2. Название публикации

How to use Lattice and Experimental data for QCD Critical Point Search

### 2.3. Год публикации

2016

### 2.4. Ключевые слова

Sign problem, finite density QCD, canonical approach, lattice QCD

### 2.5. Вид публикации

статья

### 2.6. Название издания (для монографий также указываются название издательства, город)

Acta Physica Polonica B

**ISSN (при наличии):** 0587-4254

**e-ISSN (при наличии):** ---

**ISBN (при наличии):** ---

### 2.7. Выходные данные публикации (номер, том, выпуск, страницы, реквизиты документа о регистрации исключительных прав)

---

**Месяц и год публикации:** ---

**Адрес электронной версии публикации (URL) в открытом источнике (при наличии):**

---

### 2.8. DOI (при наличии)

---

**Accession Number WoS (при наличии):** ---

**Scopus EID (при наличии):** ---

### 2.9. Принята к публикации (указывается в случае официального принятия к публикации в последующих изданиях, положительного решения о регистрации исключительных прав)

Для принятых к публикации материалов п. 2.7 не заполняются.

да

**Письмо из редакции или издательства с извещением о принятии рукописи к публикации:** файл pdf, скачать

### 2.10. Издание индексируется базой данных Web of Science Core Collection

да

**2.11. Импакт-фактор издания**

.795

**2.12. Издание индексируется базой данных Scopus**

да

**2.13. Издание индексируется базой данных РИНЦ**

да

**2.14. Публикация аффилирована с организацией**

да

**2.15. В публикации:**

**В качестве источника финансирования исследования указан грант Российского научного фонда**

да

**Указаны иные источники финансирования (в том числе указаны несколько грантов Российского научного фонда), помимо данного гранта Российского научного фонда**

нет

**2.16. Файл с текстом публикации**

файл pdf, скачать

---

4

---

**2.1. Авторы публикации**

**на русском языке:** Борняков В.Г., Бойда Д.Л., Гой В.А., Молочков А.В., Накамура А., Николаев А.А., Захаров В.И.

**на английском языке:** V. G. Bornyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov

**WoS Researcher ID (при наличии):** ---

**Scopus AuthorID (при наличии):** ---

**2.2. Название публикации**

Study of lattice QCD at finite chemical potential using the canonical ensemble approach

**2.3. Год публикации**

2016

**2.4. Ключевые слова**

lattice QCD, baryon chemical potential, canonical ensemble, phase transition

**2.5. Вид публикации**

статья

**2.6. Название издания (для монографий также указываются название издательства, город)**

EPJ Web of Conferences

**ISSN (при наличии):** 2100-014X

**e-ISSN (при наличии):** 2100-014X

**ISBN (при наличии):** ---

**2.7. Выходные данные публикации (номер, том, выпуск, страницы, реквизиты документа о регистрации исключительных прав)**

---

**Месяц и год публикации:** ---

**Адрес электронной версии публикации (URL) в открытом источнике (при наличии):**

<https://arxiv.org/abs/1611.09768>

**2.8. DOI (при наличии)**

---

**Accession Number WoS (при наличии):** ---

**Scopus EID (при наличии):** ---

**2.9. Принята к публикации (указывается в случае официального принятия к публикации в последующих изданиях, положительного решения о регистрации исключительных прав)**

Для принятых к публикации материалов п. 2.7 не заполняются.

да

**Письмо из редакции или издательства с извещением о принятии рукописи к публикации:** файл pdf, скачать

**2.10. Издание индексируется базой данных Web of Science Core Collection**

нет

**2.11. Импакт-фактор издания**

.1

**2.12. Издание индексируется базой данных Scopus**

да

**2.13. Издание индексируется базой данных РИНЦ**

да

**2.14. Публикация аффилирована с организацией**

да

**2.15. В публикации:**

**В качестве источника финансирования исследования указан грант Российского научного фонда**

да

**Указаны иные источники финансирования (в том числе указаны несколько грантов Российского научного фонда), помимо данного гранта Российского научного фонда**

нет

**2.16. Файл с текстом публикации**

файл pdf, скачать

**2.1. Авторы публикации**

**на русском языке:** Брагута В.В., Ильгенфритц Е.-М., Котов А.Ю., Молочков А.В., Николаев А.А.

**на английском языке:** Braguta V.V., Ilgenfritz E.-M., Kotov A.Yu., Molochkov A.V., Nikolaev A.A.

**WoS Researcher ID (при наличии):** ---

**Scopus AuthorID (при наличии):** ---

**2.2. Название публикации**

Study of the phase diagram of dense two-color QCD within lattice simulation

**2.3. Год публикации**

2016

**2.4. Ключевые слова**

Lattice QCD, finite baryon density, phase diagram, chemical potential, chiral condensate

**2.5. Вид публикации**

статья

**2.6. Название издания (для монографий также указываются название издательства, город)**

Physical Review D

**ISSN (при наличии):** 2470-0010

**e-ISSN (при наличии):** 2470-0029

**ISBN (при наличии):** ---

**2.7. Выходные данные публикации (номер, том, выпуск, страницы, реквизиты документа о регистрации исключительных прав)**

---

**Месяц и год публикации:** ---

**Адрес электронной версии публикации (URL) в открытом источнике (при наличии):**

<https://arxiv.org/pdf/1605.04090.pdf>

**2.8. DOI (при наличии)**

---

**Accession Number WoS (при наличии):** ---

**Scopus EID (при наличии):** ---

**2.9. Принята к публикации (указывается в случае официального принятия к публикации в последующих изданиях, положительного решения о регистрации исключительных прав)**

Для принятых к публикации материалов п. 2.7 не заполняются.

да

**Письмо из редакции или издательства с извещением о принятии рукописи к публикации:** файл pdf, скачать

**2.10. Издание индексируется базой данных Web of Science Core Collection**

да

**2.11. Импакт-фактор издания**

4.6

**2.12. Издание индексируется базой данных Scopus**

да

**2.13. Издание индексируется базой данных РИНЦ**

да

**2.14. Публикация аффилирована с организацией**

да

**2.15. В публикации:**

В качестве источника финансирования исследования указан грант Российского Проект № 15-12-20008/2016 Страница 28 из 36

научного фонда

да

Указаны иные источники финансирования (в том числе указаны несколько грантов Российского научного фонда), помимо данного гранта Российского научного фонда

да

## 2.16. Файл с текстом публикации

---

---

6

---

## 2.1. Авторы публикации

*на русском языке:* Е. Ито, К. Нагата, О. Накагава, А. Накамура, В.И. Захаров

*на английском языке:* Etsuko Itou, Keitaro Nagata, Yoshiyuki Nakagawa, Atsushi Nakamura, V.I.

Zakharov

**WoS Researcher ID (при наличии):** ---

**Scopus AuthorID (при наличии):** ---

## 2.2. Название публикации

Entanglement in Four-Dimensional SU(3) Gauge Theory

## 2.3. Год публикации

2016

## 2.4. Ключевые слова

Quantum entanglement, entanglement entropy, lattice gauge theory

## 2.5. Вид публикации

статья

## 2.6. Название издания (для монографий также указываются название издательства, город)

Progress of Theoretical and Experimental Physics

**ISSN (при наличии):** 2050-3911

**e-ISSN (при наличии):** 2050-3911

**ISBN (при наличии):** ---

## 2.7. Выходные данные публикации (номер, том, выпуск, страницы, реквизиты документа о регистрации исключительных прав)

no.6, 061B01

**Месяц и год публикации:** 06.2016

**Адрес электронной версии публикации (URL) в открытом источнике (при наличии):**

<http://ptep.oxfordjournals.org/content/2016/6/061B01.full.pdf+html>

## 2.8. DOI (при наличии)

10.1093/ptep/ptw050

**Accession Number WoS (при наличии):** ---

**Scopus EID (при наличии):** ---

## 2.9. Принята к публикации (указывается в случае официального принятия к публикации в последующих изданиях, положительного решения о регистрации исключительных прав)

Для принятых к публикации материалов п. 2.7 не заполняются.

---

**Письмо из редакции или издательства с извещением о принятии рукописи к публикации:** ---

**2.10. Издание индексируется базой данных Web of Science Core Collection**

да

**2.11. Импакт-фактор издания**

1.889

**2.12. Издание индексируется базой данных Scopus**

да

**2.13. Издание индексируется базой данных РИНЦ**

да

**2.14. Публикация аффилирована с организацией**

да

**2.15. В публикации:**

**В качестве источника финансирования исследования указан грант Российского научного фонда**

да

**Указаны иные источники финансирования (в том числе указаны несколько грантов Российского научного фонда), помимо данного гранта Российского научного фонда**

да

**2.16. Файл с текстом публикации**

---

Подпись руководителя проекта \_\_\_\_\_/А. Накамура/

## План работы на 2017 год и ожидаемые результаты по проекту № 15-12-20008

### «Исследование кварк-глюонной плазмы методами решеточной КХД»

#### 3.1. План работы на 2017 год

(в том числе указываются запланированные командировки по проекту), до 5 стр.

В 2017 году работа будет вестись по следующим направлениям:

1. Работа по улучшению метода разложения по хоппинг параметру. Улучшение метода извлечения  $Z_n$  коэффициентов из  $W_n$  разложения фермионного детерминанта с помощью данных при различных значениях мнимого химического потенциала.

Одной из проблем при использовании разложения по параметру хоппинга для расчета зависимости фермионного детерминанта от мнимого химического потенциала  $m_i q_l$  является проблема корректности применения процедуры ревейтинга (reweighting). Стандартно генерация конфигураций производится при нулевом значении мнимого химического потенциала, а значения средних для других  $m_i q_l$  получается с помощью ревейтинга. Мы обнаружили, что этого недостаточно для получения правильного поведения фермионного детерминанта для  $m_i q_l / T > \pi/6$ . Для решения этой проблемы в методе разложения по параметру хоппинга мы используем конфигурации калибровочного поля, сгенерированные для 5 -- 10 значений  $m_i q_l$ . Мы ожидаем, что это позволит правильно вычислить фермионный детерминант во всей области значений  $m_i q_l$  и получить правильные значения  $Z_n$  этим методом.

Будут выполнены работы: вычисление коэффициентов  $W_n$  в методе разложения по параметру хоппинга для 5 -- 10 значений  $m_i q_l$  для каждого значения температуры. Будет разработан метод и алгоритм на языке C++ сшивания всех полученных с помощью ревейтинга данных для фермионного детерминанта в одну функцию мнимого химического потенциала, оценена погрешность разработанного метода. Будут вычислены значения  $Z_n$  из полученной зависимости детерминанта. Ожидаем, что мы сможем получить методом разложения по параметру хоппинга корректные значения  $Z_n$  для больших значений  $n$ .

2. Повышение эффективности работы алгоритма гибридного Монте Карло. Разработка алгоритма автоматической подстройки параметров в preconditioning типа Хазенбуша.

Одной из проблем использования алгоритмов имеющих внутренние параметры является поиск оптимальных значений этих параметров. Численное нахождение собственных значений фермионного детерминанта, требуемых для выбора оптимального значения параметра в preconditioning типа Хазенбуша является трудоемкой задачей, и для получения прироста производительности мы не можем явно использовать этот метод. В рамках работ по гранту мы разработаем адаптивный алгоритм подстройки параметра, и подстройка будет происходить в период выполнения основной программы. Данный алгоритм будет основан на минимизации времени, требуемого на генерацию одной конфигурации. Используя данный алгоритм мы сможем максимально повысить быстродействие работы preconditioning типа Хазенбуша.

3. Генерация конфигураций калибровочного поля.

а) Мы продолжим использование решетки  $16^3 \times 4$  при тех же значениях массы кварка и температуры, которые использовались в 2016 году. Будет значительно увеличена статистика для значений температуры  $T/T_c = 1.08$  и  $0.99$ . Будут добавлены одно или два новые значения температуры вблизи  $T/T_c = 1.0$ .

б) Для проверки эффектов массы кварка будут генерироваться конфигурации для уменьшенного значения массы кварка на решетке того же размера.

в) Для проверки эффектов конечного шага решетки будут генерироваться конфигурации для

уменьшенного шага решетки на решетках с  $N_t=6$ .

4. Работа по развитию и проверке нового метода вычислений канонической статсуммы, разработанного на 2-м этапе выполнения проекта.

а) Будет решена проблема аналитического продолжения в область действительных значений для интервала температур между  $T_c$  и  $T_{RW}$ , не решенная в 2016 году.

б) Будет показано, что увеличение статистики позволяет провести вычисление коэффициентов следующих членов в подгоночных функциях для обеих фаз, что особенно важно для температуры  $T/T_c=0.99$ .

в) Будет улучшено сравнение результатов с методом разложения по параметру хоппинга. Это станет возможным в основном благодаря улучшению точности вычислений в методе разложения по параметру хоппинга, описанному в пункте 1 данного плана работ.

г) Пока мы используем в новом методе вычисления  $Z_n$  подгонку исходных данных для кварковой плотности некоторыми теоретически обоснованными функциями. Данная процедура вносит систематическую ошибку в результат, т.к. сглаживает поведение плотности. Заметим, что сглаженные флуктуации могут иметь маленькую амплитуду в мнимой области химического потенциала, но в действительной области они потенциально могут соответствовать большим изменениям.

Вместо подгонки мы попытаемся использовать кубический сплайн для исходных данных для кварковой плотности или прямое вычисление численного интеграла. При достаточно высокой статистике и достаточно большом числе точек, в которых вычислена кварковая плотность, мы можем получить более точные результаты для  $Z_n$ .

д) Будут вычислены кварковая плотность, ее восприимчивость и более высокие моменты, давление и плотность энергии для нескольких значений температуры ненулевым химическом потенциале до значений  $m_q/T=2$ .

5. Работа по вычислению линии фазового перехода в плоскости  $T - m_l$ .

а) Будет улучшена точность определения линии фазового перехода в плоскости  $T - m_l$  с помощью нового подхода разработанного в 2016 году, см. пункт 4) отчета о работах, выполненных в 2016 году и публикацию по результатам проекта номер 4.

б) Будет определена линия фазового перехода конфайнмент - деконфайнмент в плоскости температура - мнимый химический потенциал. Затем будет использовано аналитическое продолжение на действительные значения химического потенциала. Это известный метод, позволяющий найти линию перехода для небольших значений  $m_l$ . Мы используем его для уточнения экстраполяции давления из области  $T > T_c$  в область  $T < T_c$ , выполняемой в новом подходе к вычислению линии фазового перехода в плоскости  $T - m_l$ .

в) Для вычисления линии фазового перехода в плоскости  $T - m_l$  будет использован еще один способ -

метод разложения по хоппинг параметру. Этот способ уже использовался ранее. Мы получим более точные результаты благодаря улучшению метода, описанному в пункте 1 плана работ. Этот способ может быть использован только для достаточно большой массы кварка. Полученные результаты будут служить проверкой результатов, полученных с помощью нового метода, который не имеет ограничений по массе кварка.

6. Нули Ли-Янга

Анализ нулей Ли-Янга является хорошим методом изучения критического поведения системы. В КХД при конечной плотности это соответствует изучению системы в комплексной плоскости значений химического потенциала. Канонический подход позволяет нам изучать систему не только для чисто действительного или чисто мнимого химического потенциала, но и для комплексных значений. А. Накамура разработал необходимый алгоритм, применяя эту идею к данным по столкновению ядер высокой энергии, используя экспериментальные данные RHIC. (A. Nakamura and K. Nagata, 'Probing QCD phase structure using baryon multiplicity distribution', Prog. Theor. Exp Phys. 2016, 033D01) Обнаружено, что необходимым условием при анализе нулей Ли-

Янга является использование арифметики произвольной точности. А. Накамура представил предварительные результаты по анализу нулей Ли-Янга на конференциях "Theory of Hadronic Matter under Extreme Conditions, JINR, April 18, 2016 и "A new method in lattice QCD with multi-precision calculations", at annual meeting of The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics on Sept. 11, 2016. Используя разработанный алгоритм и данные наших вычислений для  $Z_n(T)$ , полученные в рамках пунктов плана 4 и 5, мы выполним анализ нулей Ли-Янга в КХД с  $N_f=2$ . Вид распределения нулей вблизи действительной оси активности (fugacity) указывает на порядок фазового перехода по химическому потенциалу при фиксированной температуре, что должно помочь в определении положения критической точки.

Планируемые командировки:

Участие в конференции 35th International Symposium on Lattice Field Theory, 19-24 июня 2017, Гранада, Испания, 4 человека.

Визиты в RIKEN, Университет Токио, RCNP (Осака) для обсуждения проблем канонического подхода, 4 визита.

Участие в конференции XXVI international conference Quark Matter 2017, 5 - 11 февраля, 2017, Чикаго, США, 2 участника.

### **3.2. Ожидаемые в конце 2017 года конкретные научные результаты**

*(форма изложения должна дать возможность провести экспертизу результатов и оценить степень выполнения заявленного в проекте плана работы), до 5 стр.*

- 1) Будет разработан улучшенный метод разложения по хоппинг параметру, позволяющий значительно повысить точность вычислений этим методом.
- 2) Повышение эффективности работы важных компонент алгоритма гибридного Монте Карло на 30-50%.
- 3) Решение проблемы аналитического продолжения к действительным значениям химического потенциала для интервала температур между  $T_c$  и  $T_{RW}$ .
- 4) Результаты для решетки физических наблюдаемых - кварковой плотности, ее восприимчивости и более высоких моментов, давления и плотности энергии для нескольких значений температуры при ненулевом химическом потенциале до значений  $m_q/T = 2$  на решетках  $16^3 \times 4$  и  $18^3 \times 6$  для двух значений массы кварка.
- 5) Численные результаты, определяющие линию фазового перехода в плоскости  $T - m_q$  в КХД с  $N_f=2$  для значений  $m_q/T_c < 1.5$ .
- 6) Результаты анализа нулей Ли-Янга в КХД с  $N_f=2$  и выводы о наличии критического поведения в изучаемой области значений температуры и химического потенциала.

### **3.3. Файл с дополнительной информацией (при необходимости)**

*(с графиками, фотографиями, рисунками и иной информацией о содержании проекта, размер до 3 Мб в формате pdf)*

Подпись руководителя проекта \_\_\_\_\_/А.Накамура/

Запрашиваемое финансирование по проекту  
№ 15-12-20008  
«Исследование кварк-глюонной плазмы методами решеточной  
КХД»,  
на 2017 год

**4.1. Планируемые расходы по проекту за счет средств, предоставляемых Фондом на следующий год (тыс. руб.)**

Без учета неиспользованного остатка средств гранта предыдущих лет на начало планируемого года.

№ п.п.	Направления расходования средств гранта	Сумма расходов (тыс.руб.)
	<b>ВСЕГО</b>	10000
	Вознаграждение членов научного коллектива (с учетом страховых взносов во внебюджетные фонды, без лиц категории «вспомогательный персонал»),	7400
	в том числе:	
	вознаграждение членов научного коллектива – исследователей в возрасте до 39 лет (включительно) Имеет информационный характер.	3500
	Вознаграждение лиц категории «вспомогательный персонал» (с учетом страховых взносов во внебюджетные фонды)	0
1	Итого вознаграждение (с учетом страховых взносов во внебюджетные фонды)	7400
2	Оплата услуг сторонних организаций Не более значений, предусмотренных соглашением.	0
3	Расходы на приобретение оборудования и иного имущества, необходимых для проведения научного исследования (включая монтаж, пусконаладочные работы, обучение сотрудников и ремонт)	600
4	Расходы на приобретение материалов и комплектующих для проведения научного исследования	0
5	Иные расходы для целей выполнения проекта	1000
6	Накладные расходы организации Не могут превышать значений, предусмотренных соглашением.	1000

**4.2. Расшифровка планируемых расходов**

**№ п.п. Направления расходования средств гранта, расшифровка**

- 1 Итого вознаграждение (с учетом страховых взносов во внебюджетные фонды)  
(указывается общая сумма вознаграждения, включая установленные трудовым законодательством Российской Федерации гарантии, отчисления по страховым взносам на обязательное пенсионное страхование, на обязательное медицинское страхование, на обязательное социальное страхование на случай временной нетрудоспособности и в связи с материнством, на обязательное социальное страхование от несчастных случаев на производстве и профессиональных заболеваний)

7400 тысяч рублей

- 2 Оплата услуг сторонних организаций  
(приводится перечень планируемых договоров (счетов) со сторонними организациями с указанием предмета и суммы каждого договора)

- 3 Расходы на приобретение оборудования и иного имущества, необходимых для проведения научного исследования (включая монтаж, пусконаладочные работы, обучение сотрудников и ремонт)

(представляется перечень планируемых к закупке оборудования и иного имущества, необходимых для проведения научного исследования)

HDD диски для сетевого RAID-накопителя (купленного на втором этапе выполнения работ по гранту, полный объем 48ТБ): (12+3)

330 тыс. рублей

2x10GB Ethernet Сетевая карта для сетевого RAID-накопителя для подключения к кластеру Восток-1 60

тыс. рублей

HDD диски для управляющего узла кластера Восток-1 (запасные) 60 тыс. рублей

Источник бесперебойного питания (ИБП) для вычислительных ПК 150 тыс рублей

- 5 Иные расходы для целей выполнения проекта

(приводится классификация иных затрат на цели выполнения проекта, в том числе - расходы на командировки, связанные с выполнением проекта или представлением результатов проекта, оплату услуг связи, транспортных услуг, иное; расходы не расшифровываются)

Планируемые командировки:

Участие в конференции 35th International Symposium on Lattice Field Theory, 19-24 июня 2017, Гранада, Испания, 4 человека, 480 тысяч рублей.

Визиты в RIKEN, Университет Токио, RCNP (Осака) для обсуждения проблем канонического подхода, 4 визита, 240 тысяч рублей.

Участие в конференции XXVI International conference Quark Matter 2017, 5 - 11 февраля, 2017, Чикаго, США, 2 участника, 280 тысяч рублей.

Подпись руководителя проекта \_\_\_\_\_ /А. Накамура/

Подпись руководителя организации, заверенная печатью

\_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_/

М.П.

## **Изменения в составе участников**

**Борняков Виталий Геннадьевич**

**Молочков Александр Валентинович**

**Николаев Александр Александрович**

**Захаров Валентин Иванович**

**Бойда Денис Леонидович**

**Брагуа Виктор Валериевич**

**Гой Владимир Александрович**